

Die Herstellung einer linearen Differentialgleichung aus einem gegebenen Element der Integralfunction.

Von Karl Heun, *München.*

Es kommt nicht selten vor, dass ein Element einer analytischen Function einer unabhängigen Veränderlichen in Form einer convergenten Potenzreihe gegeben ist, deren Coefficienten durch eine homogene lineäre Recursionsgleichung bestimmt sind. In diesem Falle kann man das Problem der Integration regulärer lineärer Differentialgleichungen durch Potenzreihen umkehren und die Differentialgleichung bestimmen, welcher die gegebene Reihe genügt. Diese elementare Aufgabe ist im Folgenden gelöst. Bemerkenswerth scheint mir der äusserst Kurze und durchsichtige Beweis für die Existenz der Integrale regulärer Differentialgleichungen, welcher als ein einfaches Corollar der nachstehenden Lösung erscheint. Dass der hier gegebene Beweis ohne Benutzung des Integralalgorithmus geführt ist, erscheint mir ebenfalls als ein Vorzug desselben.

1.

Ein Element einer analytischen Function y des Argumentes x sei gegeben durch die in der Umgebung des Punktes a convergente Reihe

$$y = g_0 + g_1(x-a) + g_2(x-a)^2 + \dots + \text{in inf.}$$

Ferner seien die Coefficienten $g_0, g_1, g_2, \dots$ durch die recurrente Relation

$$G_0(n).g_n + G_1(n-1).g_{n-1} + G_2(n-2).g_{n-2} + \dots + G_{n-r}(n-r).g_{n-r} = 0 \quad (1)$$

verknüpft. Wir denken uns die Grössen $G_0, G_1, \dots G_{n-r}$ als ganze rationale Functionen p^{ten} Grades von n gegeben. Einige derselben können jedoch auch von einem niederen Grade sein. Erreicht G_0 wirklich den Grad p, dann bringe man die Gleich. (1) auf die Form

$$\frac{g_n}{g_{n-1}} + \frac{G_1}{G_0} + \frac{G_2}{G_0}\cdot\frac{g_{n-2}}{g_{n-1}} + \dots + \frac{G_r}{G_0}\cdot\frac{g_{n-r}}{g_{n-1}} = 0 \quad (1a)$$

und setze

$$\frac{G_r}{G_0} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \gamma_\nu^{(r)} \left(\frac{1}{n}\right)^\nu. \tag{a}$$

Wir versuchen nun die Gleichung (1a) durch die Annahme

$$\frac{g_n}{g_{n-1}} = \sum_{\nu=0} c_\nu \left(\frac{1}{n}\right)^\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n}\right)$$

identisch zu befriedigen. Dann ist

$$\frac{g_{n-1}}{g_{n-2}} = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-1}\right),$$

$$\frac{g_{n-1}}{g_{n-3}} = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Gleich. (1a) geht durch Einführung dieser Potenzreihen über in

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-1}\right) \cdots \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$+ \frac{G_1}{G_0} \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-1}\right) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-2}\right) \cdots \mathfrak{P}\left(\frac{1}{n-r+1}\right) + \cdots + \frac{G_r}{G_0} = 0. \tag{1b}$$

Hieraus lassen sich die Grössen C_0, C_1, ... nach der Methode der unbestimmten Coefficienten berechnen. Für C_0 erhält man die Gleichung

$$C_0^r + \gamma_0^{(1)} \cdot C_0^{r-1} + \gamma_0^{(2)} \cdot C_0^{r-2} + \cdots + \gamma_0^{(r-1)} \cdot C_0 + \gamma_0^{(r)} = 0. \tag{2}$$

Die Wurzeln derselben seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$. Man setze nun für $\mathfrak{r} = 1, 2, \ldots r$:

$$\alpha_\mathfrak{r} = \frac{1}{\xi_\mathfrak{r} - a}. \tag{3}$$

Dann ist also

$$\frac{g_n}{g_{n-1}} = \frac{1}{\xi_\mathfrak{r} - a} + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n^2} + \cdots$$

Nach einem bekannten von Herrn Weierstrass auf complexe Grössen übertragenen Gauss'schen Satze* ist also die Reihe

$$y = g_0 + g_1(x-a) + g_2(x-a)^2 + \cdots + \text{ in inf.}$$

absolut convergent für alle Werthe von x, welche der Bedingung genügen

$$|x-a| < |\xi_\mathfrak{r} - a|.$$

---

*Gauss' Werke, Vol. III, pag. 139-143. Weierstrass: Abhandlungen aus der Functionenlehre, p. 212-225.

Jetzt ist natürlich unter $\xi_{\mathfrak{r}}$ derjenige der durch Gleich. (2) bestimmten Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ zu verstehen, welcher dem Punkte a am *nächsten* liegt. Werden mehrere Wurzeln der Gleichung (2) einander gleich, dann ändert sich nichts an der vorstehenden Schlussfolgerung. Wird $\alpha_{\mathfrak{r}} = 0$ $[r = 1]$ dann ist $\xi_{\mathfrak{r}} = \infty$ zu setzen.

2.

Wir wollen jetzt die lineäre Differentialgleichung aufstellen, welcher die Reihe y formal genügt. Zu diesem Zwecke setze* man

$$G_{\mathfrak{r}}(n-\mathfrak{r}) = G_{\mathfrak{r}}(0) + \Delta G_{\mathfrak{r}}(0)(n-\mathfrak{r}) + \frac{1}{1.2}\Delta^2 G_{\mathfrak{r}}(0)(n-\mathfrak{r})(n-\mathfrak{r}-1)$$
$$+ \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p}\Delta^p G_{\mathfrak{r}}(0)(n-\mathfrak{r})\ldots(n-\mathfrak{r}-p+1).$$

Dann lässt sich die Gleich. (1) in die Form bringen:

$$\begin{aligned}
&G_0(0)\cdot g_n + G_1(0)\cdot g_{n-1} + \ldots + G_r(0)\cdot g_{n-r}\\
&+ \Delta G_0(0)\cdot n\cdot g_n + \Delta G_1(0)\cdot \overline{n-1}\cdot g_{n-1} + \ldots + \Delta G_r(0)\cdot \overline{n-r}\cdot g_{n-r}\\
&+ \frac{1}{1.2}[\Delta^2 G_0(0)\cdot n\cdot \overline{n-1}\cdot g_n + \Delta^2 G_1(0)\cdot \overline{n-1}\cdot \overline{n-2}\cdot g_{n-1}\\
&+ \ldots + \Delta G_r(0)\cdot \overline{n-r}\cdot \overline{n-r-1}\cdot g_{n-r}]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{1}{1.2\ldots p}[\Delta^p G_0(0)\cdot n\cdot \overline{n-1}\ldots \overline{n-p+1}\cdot g_n\\
&+ \ldots + \Delta^p G_r(0)\cdot \overline{n-r}\cdot \overline{n-r-1}\ldots \overline{n-r-p+1}\cdot g_{n-r}] = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $(x-a)^n$ und summire von $n=0$ bis $n=\infty$. Beachtet man ferner, dass g mit einem negativen Index verschwinden muss, *falls* die Gleich. (1) auch die Coefficienten $g_1, g_2, \ldots g_{r-1}$ bestimmen soll, dann erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&[G_0(0) + G_1(0)(x-a) + G_2(0)(x-a)^2 + \ldots + G_r(0)(x-a)^r]\cdot y\\
&+ [\Delta G_0(0) + \Delta G_1(0)(x-a) + \Delta G_2(0)(x-a)^2 + \ldots + \Delta G_r(0)(x-a)^r](x-a)\cdot\frac{dy}{dx}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{1}{1.2\ldots p}[\Delta^p G_0(0) + \Delta^p G_1(0)(x-a) + \Delta^p G_2(0)(x-a)^2\\
&\qquad + \ldots + \Delta^p G_r(0)(x-a)^r](x-a)^p\cdot\frac{d^p y}{dx^p} = 0. \qquad (I)
\end{aligned}$$

---

* Die Operation Δ ist in der üblichen Weise zu verstehen. Es ist also

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),\quad \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x),\ \text{etc.}$$

Die Reihe y genügt also einer inbezug auf den Punkt a *regulären* linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung. An der Stelle $x=a$ findet im Allgemeinen eine Verzweigung statt. Da nun infolge der Voraussetzung über den Geltungsbereich der Relation (1) die Gleichung: $G_0(0).g_0=0$ bestehen muss, welchen Werth man auch g_0 beilege, so ist $G_0(0)$ gleich Null anzunehmen. Die determinirende Gleichung inbezug auf den Punkt $x=a$ heisst dann

$$0=\Delta G_0(0)+\frac{1}{1.2}\Delta^2 G_2(0)(\lambda-1)+\frac{1}{1.2.3}\Delta^3 G_0(0)(\lambda-1)(\lambda-2)$$
$$+\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots.p}\Delta^p G_0(0)(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-p+1)\,. \quad \text{(Ia)}$$

Die übrigen Verzweigungspunkte der Integralfunction von Gleich. (I) sind Wurzeln der Gleichung

$$\Delta^p G_0(0)+\Delta^p G_1(0)(x-a)+\Delta^p G_2(0)(x-a)^2+\ldots.+\Delta^p G_r(0)(x-a)^r=0\,. \quad (3)$$

Umgekehrt ist bekanntlich nicht jeder Werth von x, welcher diese Gleichung identisch befriedigt, nothwendig einem Verzweigungspunkte entsprechend. Es ist jedoch nicht nöthig auf diese Verhältnisse hier näher einzugehen, da dieselben aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen hinreichend bekannt sind.

Als Beispiel der Construction der Gleich. (I) aus einer gegebenen Reihe möge das folgende dienen. Aus der Gauss'schen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ leite man eine erhebt andere ab indem man jeden Coefficienten von $x^0, x^1, x^2, \ldots.$ zum Quadrat erhebt. So entsteht die Reihe

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)=1+\frac{\alpha^2.\beta^2}{\gamma^2}x+\frac{\alpha^2(\alpha+1)^2.\beta^2(\beta+1)^2}{1^2.2^2.\gamma^2(\gamma+1)^2}x^2+\ldots.+\text{in inf.}$$

Man soll die Differentialgleichung aufstellen, welche die Function $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)$ identisch befriedigt. Die Relation (1) heisst in diesem Falle

$$n^2(\gamma+n-1)^2 g_n-(\alpha+n-1)^2(\beta+n-1)^2 g_{n-1}=0\,.$$

Es ist also

$$G_0(n) \quad =(\gamma-1)^2 n^2+2(\gamma-1)n^3+n^4,$$
$$-G_1(n-1)=[\alpha\beta+(\alpha+\beta)(n-1)+(n-1)^2]^2.$$

Folglich wird

$$\Delta G_0(n) = \gamma^2 + 2\gamma(\gamma+1)n + 6\gamma n^2 + 4n^3,$$

$$-\Delta G_1(n-1) = (\alpha+\beta+1)(2\alpha\beta+\alpha+\beta+1) + 2[(\alpha+\beta)^2 + 3(\alpha+\beta) + 2\alpha\beta + 2](n-1)$$
$$+ 6(\alpha+\beta+1)(n-1)^2 + 4(n-1)^3,$$

$$\Delta^2 G_0(n) = 2\gamma(\gamma+4) + 4 + 12(\gamma+1)n + 12n^2,$$

$$\Delta^3 G_0(n) = 12(\gamma+2) + 24n,$$

$$\Delta^4 G_0(n) = 24,$$

$$-\Delta^2 G_1(n-1) = 2[(\alpha+\beta)^2 + 6(\alpha+\beta) + 7] + 12(\alpha+\beta+2)(n-1) + 12(n-1)^2,$$

$$-\Delta^3 G_1(n-1) = 12(\alpha+\beta+3) + 24(n-1),$$

$$-\Delta^4 G_1(n-1) = 24.$$

Die Differentialgleich. (I) erhält also die Form

$$(1-x)x^3 \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + 2[\gamma + 2 - (\alpha+\beta+3)x]x^2 \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+ \{\gamma(\gamma+4) + 2 - [(\alpha+\beta)^2 + 6(\alpha+\beta) + 7]x\} x \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ [\gamma^2 - (\alpha+\beta+1)(2\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x] \cdot \frac{dy}{dx} - \alpha^2\beta^2 \cdot y = 0. \qquad \text{(I')}$$

Für das Schema der Verzweigungsindices findet man:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0\,, & 0\,, & \alpha \\ 0\,, & 1\,, & \alpha \\ 1-\gamma, & 2\,, & \beta \\ 1-\gamma, & 2(\gamma-\alpha-\beta)+1, & \beta \end{array}\right\}$$

Die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ sind also in der That Verzweigungspunkte für die Integralfunction von Gleich. (I'). Das vollständige Integralsystem der Differentialgleichung (I') hat in der Umgebung des Punktes $x = 0$ die Form

$$\left.\begin{array}{l} y_{11} = \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ y_{21} = y_{11} \cdot \lg x + \mathfrak{P}_1(x), \\ y_{31} = x^{1-\gamma} \cdot \Phi(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x), \\ y_{41} = y_{31} \cdot \lg x + \mathfrak{P}_2(x), \end{array}\right\} \text{für } (x) < 1.$$

Weniger einfach sind die zu den Punkten $x = 1$ und $x = \infty$ gehörigen Integrale.

29

3.

In der Gleich. (2), welche die Grösse C_0 bestimmt setze man für

$$\gamma_0^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \ldots . \gamma_0^{(r)}$$

ihre Werthe ein, nemlich

$$\gamma_0^{(\mathfrak{r})} = \frac{\Delta^p G_{\mathfrak{r}}(0)}{\Delta^p G_0(0)}$$

dann geht dieselbe über in

$$0 = \Delta^p G_r(0) + \Delta^p G_{r-1}(0) . C_0 + \Delta^p G_{r-2}(0) . C_0^2 + \ldots .$$
$$+ \Delta^p G_1(0) \, C^{r-1} + \Delta^p G_0(0) . C_0^r . \quad (2a)$$

Die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots . \xi_{\mathfrak{r}}, \ldots . \xi_r$ in Gleich. (3) sind also geradezu die Wurzeln der Gleich. (3). Die Reihe

$$y = g_0 + g_1(x - a) + g_2(x - a)^2 + \ldots . + \text{in inf.}$$

convergirt also unbedingt innerhalb eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Punkt $x = a$ ist und dessen Peripherie durch den nächsten Nullpunkt der Function

$$\Delta^p G_0(0) + \Delta^p G_1(0)(x - a) + \ldots . + \Delta^p G_r(x - a)^r$$

hindurchgeht.

Hiermit ist der Existenz bereich der Integrale homogener regulärer linearer Differentialgleichungen fest gestellt (cf. die bekannte Abh. des Herrn Fuchs in Journ. f. Math., t. 66, und die Arbeit des Herrn Frobenius, Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen, ib. t. 76).

Will man nach den vorstehenden Principien das Verhalten der Reihenentwicklungen auf den Convergenzkreisen und insbesondere in den Verzweigungspunkten ableiten, so hat man nur den Coefficienten C_1 aus der Gleich. (1b) zu berechnen und dann unmittelbar das Gauss-Weierstrass'sche Convergenztheorem anzuwenden, Herr Thomé hat diese Untersuchung mit Anwendung der Fourier'schen Reihen geführt (Journ. f. Math., t.).

EINBECK, 4 August, 1888.